# MATEMATICA - LEZIONE 43

mercoledì 17 dicembre 2025 09:04

## Equazioni lineari di II ordine a coeff. costanti.

Sono equazioni del tipo

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = g(x).$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ continua in $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

- Se $g(x) = 0$ $\forall x \in I$ l'equazione si dice OMOGENEA
- Se $g(x) \neq 0$ l'equazione si dice COMPLETA o NON OMOGENEA.

---

Caso $g(x) = 0$ (equazioni lineari di II ordine a coeff. costanti omogenee)

**Def**: Il polinomio $a\lambda^2 + b\lambda + c$ è detto POLINOMIO CARATTERISTICO associato all'equazione. L'equazione $p(\lambda) = 0$ è detta EQUAZIONE CARATTERISTICA.

**OSS** Sia $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ il pol. caratteristico. Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ allora $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ (dove $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono le radici di $p$) sono soluzioni dell'equazione $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

**OSS 2** Sia $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Se $\Delta = 0$ e $\lambda_1$ è l'unica radice di $p(\lambda)$, allora $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_1 x} x$ sono soluzioni dell'equazione $ay'' + by' + cy = 0$.

**OSS 3** Sia $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Se $\Delta < 0$ e e $\alpha \pm i\beta$ sono le radici complesse di $p$, allora le funzioni:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

sono soluzioni dell'equazione $ay'' + by' + cy = 0$.

**PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE**

Siano $y_1$ e $y_2$ soluzioni di:

$$a y_1'' + b y_1' + c y_1 = g_1(x)$$
$$a y_2'' + b y_2' + c y_2 = g_2(x).$$

Allora $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ la funzione $z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ è una soluzione di:

$$a z'' + b z' + c z = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x).$$

**TEOREMA** Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sia $\Delta = b^2 - 4ac$.

1) Se $\Delta > 0$ la soluzione generale di $ay'' + by' + cy = 0$ è del tipo

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$ dove $\lambda_1, \lambda_2$ sono le due radici reali del polinomio caratteristico $p(\lambda)$.

2) Se $\Delta = 0$, la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} x$$

dove $\lambda_1$ è l'unica radice di $p(\lambda)$.

3) Se $\Delta < 0$, la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$ dove

$\alpha \pm i\beta$ sono le due radici complesse di $p(\lambda)$.

ESEMPI

1) $y'' + y' - 2y = 0$.

Pol. caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$

la sol. generale è $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

2) $y'' + 2y' + y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ $\quad \Delta = 0$

$(\lambda + 1)^2 = 0 \iff \lambda = -1$

Soluzione generale:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} x \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y'' - 6y' + 25y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 25 = -16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-16}}{1} = 3 \pm i\sqrt{16} = \underbrace{3}_{\alpha} \pm \underbrace{4}_{\beta} i$$

La sol. generale è

$$y(x) = c_1 e^{3x} \cos(4x) + c_2 e^{3x} \sin(4x).$$

---

4) $y'' + 4y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm i\sqrt{4} = \pm 2i = \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{2}_{\beta} i$$

$$y(x) = c_1 e^{0\cdot x} \cos(2x) + c_2 e^{0\cdot x} \sin(2x)$$

$$= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

5) $y'' + 4y' = 0$

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

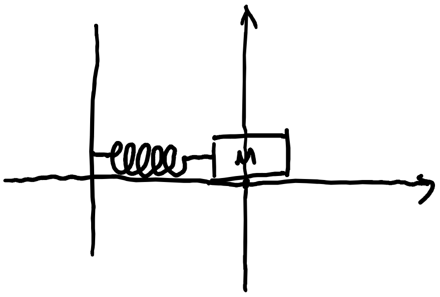
$$\lambda(\lambda + 4) = 0 \iff \lambda = 0 \lor \lambda = -4$$

$$y(x) = c_1 e^{0\cdot x} + c_2 e^{-4x}$$

$$= c_1 + c_2 e^{-4x}.$$

---

ESEMPIO IN FISICA (Moto armonico)




$x(t)$ posizione al tempo $t$

$x''(t)$ accelerazione.

$$M\, x''(t) = -K\, x(t)$$

$$x'' + \frac{K}{M}\, x = 0$$

Se $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ allora abbiamo un' eq. del tipo

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -\omega^2$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\sqrt{\omega^2} = \pm i\,\omega$$

soluzione generale:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

Si scrive anche nel modo seguente:

$$x(t) = \sqrt{c_1^2+c_2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos(\omega t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin(\omega t)\right)$$

$\left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}, \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)$ è un punto nella circonferenza di raggio 1.

$\exists\, \varphi \in \mathbb{R}$ t.c. $\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos\varphi$ e $\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \sin\varphi$.

$$x(t) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\sin\varphi \cdot \cos(\omega t) + \cos\varphi \sin(\omega t)\right)$$

$$= \sqrt{c_1^2+c_2^2}\ \sin(\varphi + \omega t)$$

$$= A \sin(\varphi + \omega t)$$

$A$ ampiezza

$\varphi$ fase iniziale

$\omega$ frequenza del moto.

---

## Caso $g(x) \neq 0$ (equazioni non omogenee)

**TEOREMA**

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $g: I \to \mathbb{R}$ continua. Se $\bar{y}$ è una soluzione particolare di $ay'' + by' + cy = g(x)$ allora la soluzione generale è del tipo

$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$ dove

$y_0(x)$ è la soluzione generale dell'eq. omogenea $ay'' + by' + cy = 0$.

**Riepilogo**: Per risolvere $ay'' + by' + cy = g(x)$.

1) Si trova la sol. generale $y_0(x)$ dell'eq. omogenea $ay'' + by' + cy = 0$.

2) Si cerca $\bar{y}(x)$ soluzione particolare dell'eq. completa (ad esempio con il metodo di similarità)

3) La soluzione generale è
$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x).$$

---

**ESEMPIO**

Cerchiamo la sol. generale di

$$y'' - y' - 2y = 2x - 3$$

1) Risolvere $y'' - y' - 2y = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ (EQUAZIONE CARATTERISTICA)

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

la sol. generale dell'eq. omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

2) Cerchiamo una sol. particolare di:

$$y'' - y' - 2y = \underbrace{2x - 3}$$

$g(x)$ è un polinomio di I grado.

Cerchiamo $\bar{y}(x) = Ax + B$.

$$\bar{y}'(x) = A$$

$$\bar{y}''(x) = 0$$

sostituiamo nell'equazione

$$0 - A - 2(Ax + B) = 2x - 3$$

$$-A - 2Ax - 2B = 2x - 3$$

$$-2Ax - A - 2B = 2x - 3$$

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -A - 2B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ 1 - 2B = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = Ax + B = -x + 2$$

$$\bar{y}(x) = Ax + B = -x + 2$$

3) conclusione: la sol. generale dell'eq. completa è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - x + 2.$$

---

Regole per il metodo di similarità (per eq. di II ordine).

1) Se $g(x)$ è un polinomio di grado $K$:
   - Se $0$ non è una radice del pol caratteristico $p(\lambda)$, si cerca $\bar{y}$ come un polinomio di grado $\leq K$.
   - Se è una radice del pol caratteristico, si cerca $\bar{y}$ come $\bar{y}(x) = q(x)\,x^m$ dove $q$ è un pol. di grado $\leq K$ e $m$ è la molteplicità di $0$ come radice di $p$.

2) Se $g(x) = e^{\alpha x} q(x)$ con $q$ pol. di grado $K$.
   - Se $p(\alpha) \neq 0$ (dove $p$ è il pol. caratteristico) allora si cerca $\bar{y}(x)$ del tipo
   $\bar{y}(x) = e^{\alpha x} h(x)$ con $h$ pol. di grado $\leq K$.
   - Se $p(\alpha) = 0$, allora
   $\bar{y}(x) = e^{\alpha x} h(x)\,x^m$ con $h$ pol. di grado $\leq K$ e $m$ molteplicità di $\alpha$ come radice di $p$.

3) Se $g(x) = q(x)\sin(\beta x)$ o $q(x)\cos(\beta x)$

- $p(i\beta) \neq 0$ allora

  $\bar{y}(x) = h_1(x)\cos(\beta x) + h_2(x)\sin(\beta x)$

  con $h_1$ e $h_2$ polinomi di grado $\leq \deg q$.

- $p(i\beta) = 0$.

  $\bar{y}(x) = h_1(x)\cos(\beta x)\,x + h_2(x)\sin(\beta x)\,x$

  con $h_1$ e $h_2$ come sopra.

4) Se $g(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,q(x)$ o $e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,q(x)$

con $q(x)$ polinomio.

- Se $p(\alpha + i\beta) \neq 0$ allora

  $\bar{y}(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,h_1(x) + e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,h_2(x)$.

  con $h_1$ e $h_2$ polinomi di grado $\leq \deg q$.

- Se $p(\alpha + i\beta) = 0$, allora

  $\bar{y}(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,h_1(x)\,x + e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,h_2(x)\,x$.

  con $h_1$ e $h_2$ come sopra.

ESEMPI

1) $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 5x - 1$

- Risolviamo $y'' - 3y' + 2y = 0$.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Sol. generale dell'eq. omogenea è

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}.$$

- Cerchiamo $\bar{y}$

$$y'' - 3y' + 2y = \underbrace{x^2 + 5x - 1}_{}$$

$g(x)$ è un pol. di II grado

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$
$$\bar{y}''(x) = 2A$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 5x - 1$$
$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2 + 5x - 1$$
$$2Ax^2 - 6Ax + 2Bx + 2A - 3B + 2C = x^2 + 5x - 1$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -6A + 2B = 5 \\ 2A - 3B + 2C = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 2B = 5 + 6A \\ 2C = -1 - 2A + 3B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 4 \\ C = 5 \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$$

- Conclusione:

Soluzione dell'equazione completa:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5.$$

---

ESEMPIO 2

$$y'' - y' = 3x + 1$$

- Risolvo $y'' - y' = 0$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \iff \boxed{\lambda = 0} \lor \lambda = 1.$$

$$y_0(x) = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^x$$
$$= c_1 + c_2 e^x$$

- Cerchiamo $\bar{y}$. $\quad g(x) = 3x+1$ polinomi di I grado

ma 0 è radice del pol caratteristico.

$$\bar{y}(x) = (Ax+B)x = Ax^2 + Bx$$
$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$
$$\bar{y}''(x) = 2A.$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$2A - (2Ax + B) = 3x + 1$$

$$2A - 2Ax - B = 3x + 1$$

$$\begin{cases} -2A = 3 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ -3 - B = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = -4 \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x.$$

- Conclusione: la sol. generale dell'eq. completa è $y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{3}{2}x^2 - 4x$.

OSS E se dimentichiamo di moltiplicare per $x$?

$$\bar{y}(x) = Ax + B$$
$$\bar{y}'(x) = Ax$$
$$\bar{y}''(x) = 0$$

$$\bar{y}'' - \bar{y}' = 0 - Ax$$

$$-Ax = 3x + 1 \quad \text{IMPOSSIBILE!}$$

ESEMPIO 3

$$3y'' + y' + y = 5x e^{2x}$$

• Risolviamo $3y'' + y' + y = 0$

$$3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 12 = -11$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{6} = -\frac{1}{6} \pm i\,\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Sol. generale dell' eq. omogenea:

$$y_0(x) = c_1 e^{-\frac{1}{6}x}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{6}x}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$$

• Cerchiamo $\bar{y}$. $\quad g(x) = 5x e^{2x}$.

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)\,e^{2x}$$

$$\bar{y}'(x) = Ae^{2x} + (Ax+B)e^{2x}\cdot 2$$

$$= e^{2x}(A + 2Ax + 2B)$$

$$= e^{2x}(2Ax + A + 2B)$$

$$\bar{y}''(x) = e^{2x}\cdot 2\,(2Ax + A + 2B) + e^{2x}(2A)$$

$$= e^{2x}(4Ax + 2A + 4B + 2A)$$

$$= e^{2x}(4Ax + 4A + 4B)$$

Sostituiamo:

$$3y'' + y' + y = 5x\, e^{2x}$$

$$3\cancel{e^{2x}}(4Ax + 4A + 4B) + \cancel{e^{2x}}(2Ax + A + 2B) + \cancel{e^{2x}}(Ax + B) = 5x\,\cancel{e^{2x}}$$

$$\underline{12Ax} + 12A + 12B + \underline{2Ax} + A + 2B + \underline{Ax} + B = 5x$$

$$15Ax + 13A + 15B = 5x$$

$$\begin{cases} 15A = 5 \\ 13A + 15B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{13}{15}A = -\frac{13}{45} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{13}{45}\right) e^{2x}$$

- Conclusione:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{6}x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{6}x} \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right) + \left(\frac{1}{3}x - \frac{13}{45}\right) e^{2x}.$$

è la sol. generale dell'equazione completa.

---

ESEMPIO 4 Risolviamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 4y'' + 3y' - y = 7 - x \\ y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = -2 \end{cases}$$

- Risolviamo $4y'' + 3y' - y = 0$.

$$4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm 5}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -1 \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_2 e^{-x}.$$

- Cerchiamo $\bar{y}(x)$. $g(x) = 7 - x$ (pol. di grado 1)

$$\bar{y}(x) = Ax + B$$
$$\bar{y}'(x) = A$$
$$\bar{y}''(x) = 0$$

$$0 + 3A - (Ax + B) = 7 - x$$
$$3A - Ax - B = 7 - x$$

$$\begin{cases} -A = -1 \\ 3A - B = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -4 \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = x - 4$$

- Soluzione generale dell'equazione completa è

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_2 e^{-x} + x - 4 .$$

- Determiniamo $c_1$ e $c_2$ usando $y(0)=0$ e $y'(0)=-2$

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_2 e^{-x} + x - 4 \quad \Rightarrow \quad y(0) = c_1 + c_2 - 4$$

$$y'(x) = \frac{c_1}{4} e^{\frac{1}{4}x} - c_2 e^{-x} + 1 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \frac{c_1}{4} - c_2 + 1$$

Vogliamo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 4 = 0 \\ \frac{c_1}{4} - c_2 + 1 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ \frac{c_1}{4} - c_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4} c_1 = 1 \\ c_2 = 4 - c_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \frac{4}{5} \\ c_2 = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{4}{5} e^{\frac{1}{4}x} + \frac{16}{5} e^{-x} + x - 4 .$$